

## APÊNDICE D

### DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

#### DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

##### a) Distribuição binomial

A distribuição binomial<sup>1</sup> é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos numa sequência de  $n$  tentativas desde que as tentativas sejam independentes. Cada tentativa resulta apenas em duas possibilidades, sucesso  $S$  ou fracasso  $F$ . A expressão que define a distribuição binomial de probabilidade é:

$$p(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad (\text{D.1})$$

Onde:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x} \quad (\text{D.2})$$

Onde  $x$  é a variável aleatória binomial, significando o número de sucessos em  $n$  repetições do experimento;  $p(x)$  é a probabilidade de obter  $x$  sucessos em  $n$  tentativas independentes do experimento;  $p$  é a probabilidade de sucesso para uma única tentativa;  $1-p$  é a probabilidade complementar (fracasso); e  $n$  é o número de vezes que o experimento é realizado. Na distribuição binomial tem-se, portanto, como características: (a) somente dois eventos podem ocorrer; (b) cada tentativa no experimento é independente das outras; e (c) a probabilidade de cada ocorrência se mantém constante para cada tentativa. Uma forma mais descritiva de apresentar a distribuição binominal é:

$$p(x) = \binom{n}{x} [p(\text{sucesso})]^x [p(\text{falha})]^{n-x} \quad (\text{D.3})$$

Em algumas situações se deseja obter a probabilidade combinada de um grupo de resultados. Esses resultados normalmente são do tipo “mais do que” ou “menos do que” determinado valor. No caso de distribuição binomial cumulativa, a expressão corresponde à soma das probabilidades consideradas, ou seja:

$$p(x) = \sum_{x=k}^n C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \quad (\text{D.4})$$

A distribuição binomial pode aproximar-se da distribuição normal nos casos em que  $n$  for muito grande e  $p$  não seja próximo de zero. A aproximação é tão mais verdadeira quanto mais o valor de  $p$  se aproxima de 0,5 ou quando se verifica a condição dada pela Eq. (D.5) a seguir:

<sup>1</sup> Originária da distribuição de Bernoulli – essa distribuição é discreta de espaço amostral  $\{0, 1\}$ , com probabilidade  $p(0)=1-p$  e  $p(1)=p$ . O cientista suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705) foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo diferencial para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas. Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são  $n$  distribuições de Bernoulli independentes com o mesmo parâmetro  $p$ , então sua soma  $x = \sum x_i$  é uma distribuição binomial.

$$np(1-p) \geq 25 \quad (\text{D.5})$$

A esperança e a variância de uma variável aleatória  $x$  que tem distribuição binomial são, respectivamente:

$$E(x) = np \quad \text{e} \quad \sigma^2 = np(1-p) \quad (\text{D.6})$$

Um caso particular da distribuição binomial é a distribuição de Bernoulli, quando  $n=1$ .

## b) Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson<sup>2</sup> expressa a probabilidade de eventos discretos ocorrerem num determinado intervalo de medidas contínuas, tais como o tempo, a distância, a área, o volume etc. Exemplos de problemas que podem ser resolvidos com a distribuição de Poisson: determinação do número de consumidores por hora em um posto de combustível, números de vezes em que um fornecimento de energia é interrompido por semestre, pontos de corrosão por metro quadrado em uma plataforma de petróleo, número de camadas de rochas por quilômetro de profundidade numa formação sedimentar etc. Observe que a variável aleatória é discreta e a unidade de medida é contínua. A distribuição de Poisson vai desde zero ocorrência até, teoricamente, um número ilimitado de ocorrências.

Se uma variável aleatória tem distribuição de Poisson, então a probabilidade de ocorrer um dado número de ocorrências por unidade de medida ( $h$ ,  $m$ ,  $m^3$ , semestre etc.) é dada por:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \quad (\text{D.7})$$

Onde  $x$  é o número de ocorrências;  $\lambda$  é a taxa média por unidade de medida; e  $t$  é o número de unidades. O valor  $\lambda t$  representa a média de ocorrências no intervalo de medida  $t$ , portanto:  $\lambda t = \mu$ . Assim, a Eq. (D.7) se torna:

$$p(x) = \frac{e^{-\mu} (\mu)^x}{x!} \quad (\text{D.8})$$

Note que a distribuição de Poisson é caracterizada por um único parâmetro, sua média. Tanto o valor esperado como a variância de uma distribuição de Poisson é a sua média,  $\lambda t$ .

## DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

### c) Distribuição uniforme

A distribuição uniforme caracteriza-se pelo fato de a variável aleatória assumir valores de mesma probabilidade de ocorrência. É também chamada de distribuição retangular e utilizada em tratamento de erros. Observe na Figura D.1 que todos os valores de  $x$  entre  $x_{min}$  e  $x_{max}$  têm a mesma probabilidade de ocorrência.

<sup>2</sup> A distribuição de Poisson foi apresentada por Siméon-Denis Poisson (1781-1840) e publicada com a sua teoria da probabilidade em 1838 no seu trabalho “*Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*”.

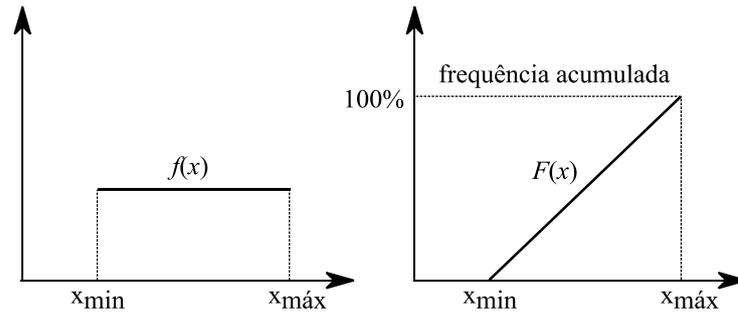


Figura D.1 – Distribuição uniforme

A distribuição uniforme é a distribuição na qual a probabilidade de se gerar qualquer ponto em um intervalo contido no espaço amostral é proporcional ao tamanho do intervalo. Se  $[a, b]=[x_{min}, x_{max}]$  for o espaço amostral, por exemplo, então a função densidade de probabilidade e frequência cumulativa são respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ (b-a)^{-1}, & a \leq x \leq b \\ 0; & x > b \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases} \quad (D.9)$$

**EXEMPLO D.1** – Com base na definição do valor esperado e da variância dados pelas Eqs. (C.8) e (C.16) (do Apêndice C) respectivamente, determine  $E(x)$  e  $\text{var}(x)$  para uma distribuição uniforme.

### Solução

De acordo com a definição do valor esperado de uma distribuição contínua, tem-se que:

$$E(x) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \quad (D.10)$$

Ou:

$$E(x) = \frac{1}{(b-a)} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \quad (D.11)$$

A variância  $\text{var}(x)$  é calculada pela Eq. (C.16). Para determinar  $E(x^2)$ , basta aplicar a Eq. (C.8) para a distribuição uniforme, portanto:

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \quad (D.12)$$

Logo:

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \quad (D.13)$$

Que resulta em:

$$\text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (\text{D.14})$$

Os simuladores estatísticos ou planilhas de cálculo possuem um gerador de números aleatórios que gera valores entre 0 e 1 seguindo uma distribuição uniforme. A simulação Monte Carlos, por exemplo, utiliza esse recurso. Esse número é chamado de pseudoaleatório, uma vez que é possível repetir a mesma sequência a partir de uma *semente aleatória*<sup>3</sup>.

#### d) Distribuição normal

A distribuição normal é a mais importante e a mais empregada distribuição no estudo da probabilidade e da estatística, também conhecida como distribuição de Gauss. A função que representa essa distribuição foi apresentada pelo matemático francês Abraham de Moivre<sup>4</sup>. Além de descrever fenômenos físicos da natureza, tem sido usada também para outras áreas.

Uma distribuição normal fica perfeitamente definida por dois parâmetros, a média  $\mu$  e o desvio padrão  $\sigma$ . Devido à sua simetria, a média, a moda e a mediana são iguais. Assim, conhecendo-se a média e o desvio padrão se consegue determinar qualquer probabilidade de um evento que apresente distribuição normal. A expressão geral para a função densidade de probabilidade da distribuição normal é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{D.15})$$

A curva do lado esquerdo da Figura D.2 ilustra uma curva de distribuição normal com as respectivas áreas de acordo com o desvio padrão. A do lado direito indica a função densidade de probabilidade e a função distribuição acumulada.

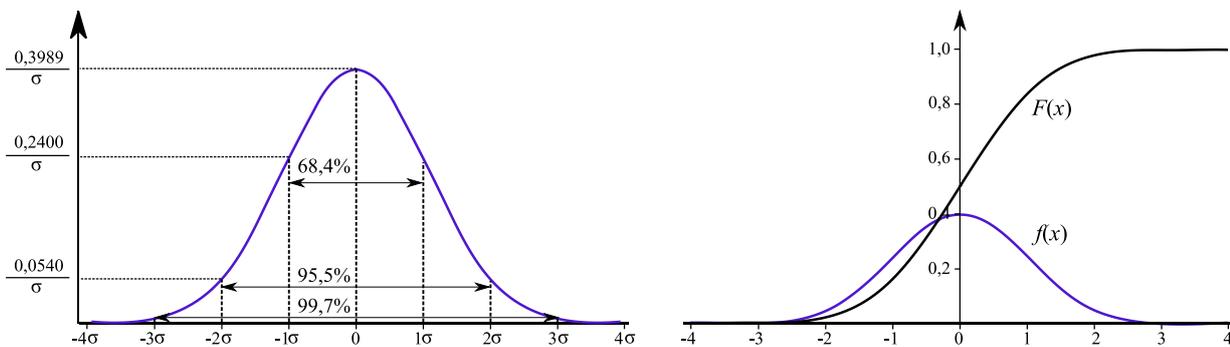


Figura D.2 – Curva de distribuição normal ou curva gaussiana

O domínio da função normal estende-se de  $-\infty$  até  $+\infty$ . O valor da média divide a curva em duas partes e o valor do desvio padrão determina a extensão do espalhamento ou dispersão da variável. Como a área total sob a curva é igual a 1, conclui-se que, quando a média (altura) é

<sup>3</sup> A semente aleatória é um número ou vetor usado para iniciar um algoritmo gerador de números pseudoaleatórios – gera uma sequência de números aproximadamente independentes uns dos outros. Existe um hardware para geração de número verdadeiramente aleatório.

<sup>4</sup> Abraham de Moivre (1667-1754) – matemático francês. Ficou famoso com a publicação da Fórmula de Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria e por seus trabalhos relacionados à teoria de probabilidade, a distribuição normal. De Moivre foi o primeiro a usar princípios atuariais e bases científicas para o cálculo de seguros de vida no ano de 1725.

reduzida, a curva deve espalhar-se para as laterais para manter a mesma área total unitária. Adota-se a seguinte notação quando uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição normal:

$$x \approx N(\mu, \sigma^2) \quad (\text{D.16})$$

Quando  $\mu=0$  e  $\sigma^2=1$ , reduz-se para a curva normal padrão cuja função densidade e distribuição de frequência acumulada são respectivamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{erfc}(x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (\text{D.17})$$

Onde  $\text{erfc}(x)$  é conhecida como a função erro gaussiana.

O fato de a curva normal ser perfeitamente definida pela sua média e seu desvio padrão, permite que todas as curvas normais possam ser reduzidas a uma curva normal padrão por simples mudança de variável. Para a leitura de determinada área cumulativa sob a curva de distribuição normal, pode-se empregar o método da distribuição normal padrão, utilizando-se, para tanto, uma tabela especial padronizada que apresente os valores para uma variável adimensional  $z$  definida por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{D.18})$$

Onde  $x$  é um valor específico da variável de interesse,  $\mu$  é a sua média e  $\sigma$  é o seu desvio padrão. Essa expressão permite determinar o ponto  $z$  sobre a curva normal padrão que corresponde a qualquer ponto  $x$  sobre a curva normal. A curva mais simples para se trabalhar é a que tem média igual a 0 e desvio padrão igual a 1, razão pela qual se transformam as curvas normais para essa curva padrão. Como a distribuição é simétrica em torno da média, é comum apresentar a tabela para a metade da distribuição. A tabela é destinada a determinar a área para a variável  $z$  sob a metade direita da curva normal que tem como média 0 e desvio padrão 1. A área sob a curva de uma distribuição normal  $N(0, 1)$  compreendida entre  $a$  e  $b$  (ver Figura D.3) é calculada com a seguinte expressão:

$$p(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \quad (\text{D.19})$$

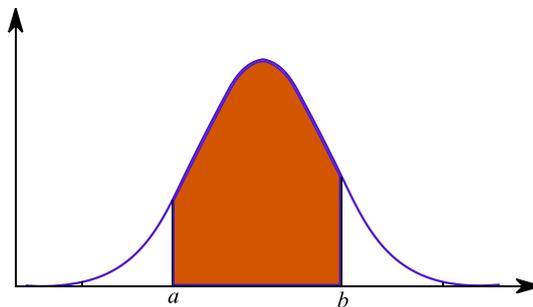


Figura D.3 – Área sob a curva compreendida por dois valores

A integral da Eq. (D.19) só é obtida por métodos de integração numérica.

Há razões para a importância da distribuição normal na estatística teórica e na aplicada. Entre essas razões podem ser citadas:

- Representam com boa aproximação para uma infinidade de fenômenos físicos e naturais;
- Servem como aproximação de distribuições binomiais quando  $n$  é grande;

- É possível estabelecer, conforme já exposto, uma curva normal padrão por meio de um escalonamento relativo das variáveis reais (média e desvio) com a variável  $z$ . Isso torna fácil trabalhar com a distribuição de todas as distribuições normais.

A distribuição normal representa uma família infinita de distribuições, uma para cada combinação possível de média e desvio padrão. Cada curva da família tem a mesma área. Ver Figura D.4.

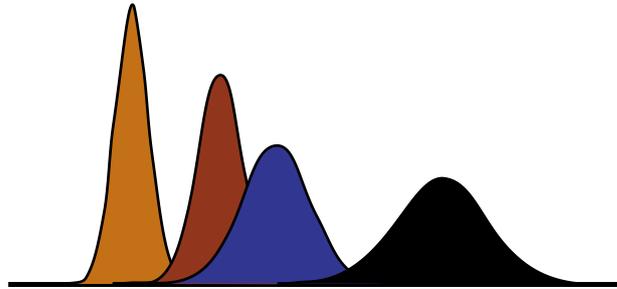


Figura D.4 – Famílias de curvas normais (área sob a curva igual a 1)

Um teorema importante da distribuição normal diz que, se uma variável aleatória  $x$  tiver uma distribuição normal  $N(\mu, \sigma^2)$  e se  $y=ax+b$ , então  $y$  terá uma distribuição normal  $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ .

### e) Distribuição exponencial

A distribuição exponencial trata de probabilidades de eventos ao longo do tempo ou da distância entre ocorrências num intervalo contínuo. Exemplos de eventos que podem ser representados por uma distribuição exponencial:

- Tempo de chegada de um cliente em um posto de abastecimento de biodiesel;
- Tempo de falhas em poços de petróleo;
- Tempo entre uma troca de broca e outra nas operações de perfuração de poços etc.

Há semelhanças entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson. As probabilidades exponenciais são expressas em termos de tempo ou distância de ocorrência entre os eventos. A função que modela essa destruição é:

$$p(T > t) = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow p(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\text{D.20})$$

Onde  $\lambda$  representa as ocorrências durante um intervalo. Assim, o espaço (ou tempo etc.) entre ocorrências durante esse intervalo é  $1/\lambda$ . A Eq. (D.20) pode ser representada por um gráfico conforme indicado na Figura D.5.

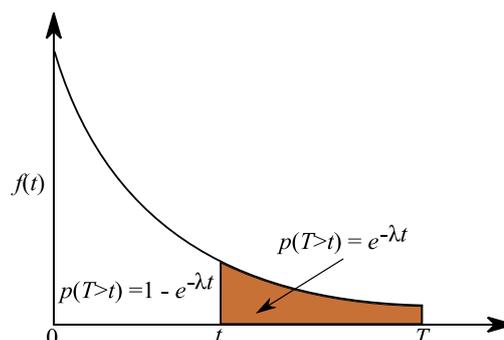


Figura D.5 – Distribuição exponencial

## f) Distribuição lognormal

A distribuição lognormal é uma distribuição contínua de probabilidade e semelhante à distribuição normal com assimetria em relação ao eixo vertical. Da mesma forma que a normal, a distribuição lognormal é definida por dois parâmetros: a média e o desvio padrão. Quando a variável aleatória  $x$  tem distribuição lognormal, o logaritmo de  $x$  tem distribuição normal. Quando a variável aleatória é formada pelo produto de outras variáveis aleatórias, a distribuição tende à lognormal.

A distribuição lognormal, assim como a distribuição de Weibull, é útil para modelar as funções de tempo de vida de produtos e materiais, por exemplo: fadiga de metais em geral, equipamento como bombas de cavidades progressivas de poços de petróleo, compressores de unidade de gás, semicondutores etc. A função densidade para a distribuição lognormal é:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{D.21})$$

Observe que a distribuição lognormal é caracterizada pela média e pelo desvio padrão. Sabe-se também que, se  $\ln(x)=y$  e  $x$  é uma variável aleatória com distribuição lognormal, então  $y$  é uma variável aleatória com distribuição normal. A Figura D.6 mostra algumas curvas com distribuição lognormal.

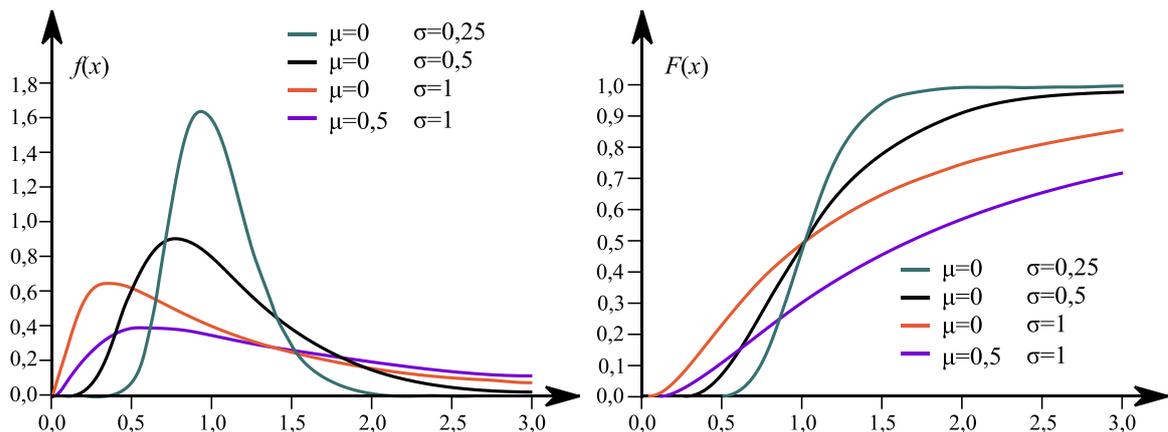


Figura D.6 – Distribuição lognormal

Pode-se demonstrar que o valor esperado de uma variável que tem distribuição lognormal é:

$$E(x) = E(e^y) = e^{E(y)+0,5 \text{ var}(y)} \quad (\text{D.22})$$

Onde  $\text{var}(y)$  é a variância de  $y$ , que equivale a:

$$\text{var}(x) = e^{2E(y)+\text{var}(y)} (e^{\text{var}(y)} - 1) \quad (\text{D.23})$$

As distribuições contínuas seguintes são as mais comuns da literatura e são mostradas nesta revisão apenas a título de informação. Algumas delas podem ser úteis em estudos específicos de algumas variáveis de natureza diversa.

### g) Distribuição de Rayleigh

A função densidade de probabilidade de Rayleigh<sup>5</sup> é definida conforme Eq. (D.24) a seguir:

$$f(x) = \frac{x}{b^2} e^{-x^2/2b^2} \quad (\text{D.24})$$

Onde  $b$  é um parâmetro de posição. A função de frequência acumulada é:

$$F(x) = \left(1 - e^{-x^2/2b^2}\right) \quad (\text{D.25})$$

A Figura D.7 ilustra a função densidade de probabilidade e a função de frequência acumuladas da distribuição de Rayleigh para alguns valores de  $b$ . Essa distribuição de frequência tem valor esperado e variância respectivamente iguais a:

$$E(x) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad \text{var}(x) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2 \quad (\text{D.26})$$

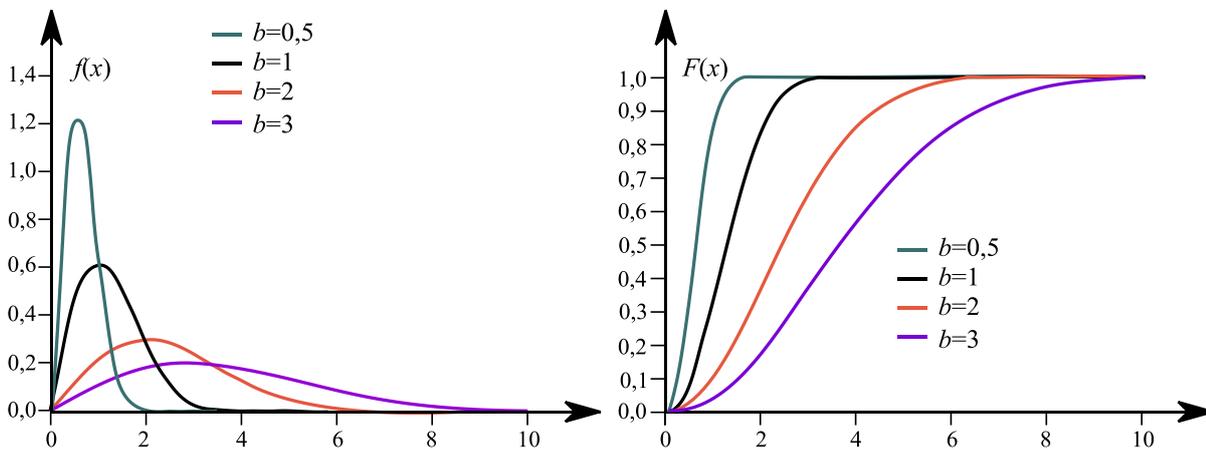


Figura D.7 – Distribuição de Rayleigh

A distribuição de Rayleigh é utilizada, por exemplo, para representar a magnitude dos vetores velocidades ortogonais do vento durante um ano, desde que se assuma que tais vetores tenham distribuição normal com igual variância e não sejam correlacionados. Outras aplicações dessa distribuição estão relacionadas à superfície de ondas e sinais de rádio.

Se  $x$  e  $y$  são variáveis independentes com distribuição normal  $N(0, \sigma^2)$ , então a variável a seguir:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{D.27})$$

Segue uma distribuição de Rayleigh. Essa distribuição é um caso especial da distribuição de Weibull.

<sup>5</sup> John William Strutt, 3° Baron Rayleigh (1842-1919) – físico inglês. Junto de William Ramsay, descobriu o elemento argônio e recebeu por isso o prêmio Nobel de Física em 1904. Ele também explicou porque o céu é azul e fez previsões sobre as superfícies de ondas, hoje conhecidas como ondas Rayleigh.

### h) Distribuição Gama

Uma distribuição importante da teoria de probabilidades é a distribuição Gama. Essa distribuição é frequentemente utilizada para modelar tempo de espera, como, por exemplo, o tempo de vida de uma pessoa. Por definição, uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição Gama com  $k$  graus de liberdade e um parâmetro escalar  $\theta$  se apresentar a seguinte *fdp*:

$$f(x, k, \theta) = \begin{cases} \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} & x \geq 0 \quad k, \theta > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (D.28)$$

Onde  $\Gamma(k)$  é a função Gama. A distribuição Gama não tem uma forma simples como a distribuição normal, a exponencial ou a lognormal – ver exemplo na Figura D.8 para alguns graus de liberdade  $k$  e alguns valores escalares de  $\theta$ .

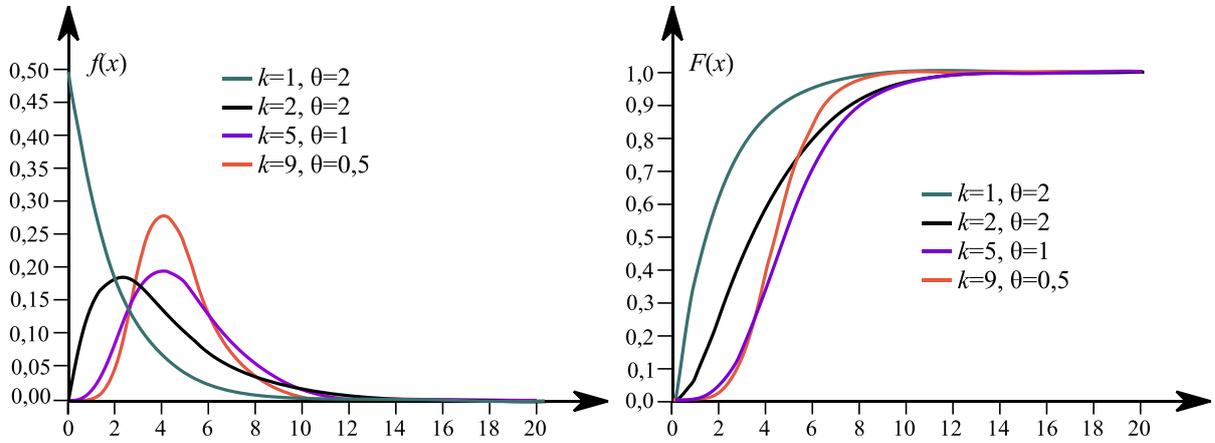


Figura D.8 – Distribuição Gama

Normalmente, a distribuição Gama é parametrizada com  $\alpha=k$  e  $\beta=1/\theta$ . Assim, com essa parametrização, tem-se a seguinte *fdp*:

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x \geq 0 \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (D.29)$$

A função Gama é uma extensão da função fatorial para números complexos, definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (D.30)$$

Onde  $t$  é uma variável muda de integração. Essa função, de modo geral, tem a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)(n-2)\dots\Gamma(1) \quad (D.31)$$

Como  $\Gamma(1)=1$ , tem-se que:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (D.32)$$

Com a seguinte particularidade:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{D.33})$$

O valor esperado da distribuição gama é  $E(x)=\alpha/\beta$  e a variância é  $var(x)=\alpha/\beta^2$ . Os casos particulares dessa distribuição são:

- Se  $\alpha=1$ , resulta que  $f(x)=\beta e^{-\beta x}$ , que equivale à distribuição exponencial onde  $\lambda=\beta$ . Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição Gama;
- Se  $\beta=1/2$  e  $\alpha=k/2$ , onde  $k$  é um inteiro positivo maior que zero, a função Gama assume a seguinte *fdp*:

$$f(x, k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{array} \right\} \quad (\text{D.34})$$

Essa *fdp* representa a distribuição qui-quadrada  $\chi^2(k)$  com  $k$  graus de liberdade, com  $E(x)=k$  e a variância  $var(x)=2k$ . Essa distribuição é muito utilizada em testes de significância de várias amostras para estimar proporções.

Se  $\beta=k$ , onde  $k$  é um inteiro positivo maior que zero, a distribuição Gama se transforma na distribuição de Erlang<sup>6</sup> com a seguinte *fdp*:

$$f(x, k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \quad x, \lambda \geq 0 \quad (\text{D.35})$$

Uma notação usual utilizada em algumas publicações é feita com o auxílio de indicadores com os quais fica explícito que, fora do intervalo especificado no indicador, a função densidade se anula. Por exemplo, a *fdp* da Eq. (D.35) pode ser reescrita incluindo uma função indicadora:

$$f(x, k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} I_{[0, \infty)}(x) \quad (\text{D.36})$$

Onde:

$$I_{[a, b]} = \left\{ \begin{array}{l} 1; \quad \text{se } a \leq x \leq b \\ 0; \quad \text{para qualquer outro valor de } x \end{array} \right\} \quad (\text{D.37})$$

## i) Distribuição de Weibull

Por definição, uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição de Weibull<sup>7</sup> com parâmetros  $k$  e  $\lambda$ , quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme Eq. (D.38) a seguir:

<sup>6</sup> Agner Krarup Erlang (1878-1929) – foi matemático, estatístico e engenheiro, pioneiro na Engenharia de Tráfego e publicou excelentes trabalhos sobre a teoria das filas em estudos de telecomunicações. A distribuição de Erlang é usada em processos estocásticos da biomatemática.

<sup>7</sup> Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887-1979) – engenheiro e matemático sueco. É reconhecido pelo seu trabalho na área de fadiga de materiais e na estatística por sua contribuição – a distribuição de Weibull.

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{D.38})$$

Onde  $k > 0$  é um parâmetro de forma e  $\lambda$  é um parâmetro de escala. O valor esperado e a variância da distribuição de Weibull são dados por:

$$E(x) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right); \quad \text{var}(x) = \lambda^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] \quad (\text{D.39})$$

A distribuição de Weibull é usada em previsão de tempo de vida de equipamentos e estimativa de tempos entre falhas.

### j) Distribuição de Cauchy

A distribuição de Cauchy<sup>8</sup> se caracteriza por não possuir uma média definida, portanto também não se pode definir seu desvio padrão. A distribuição de Cauchy tem pouca utilidade em análise de risco. É usada com frequência na mecânica e na elétrica e em problemas de medição e calibração.

Essa distribuição pode ser obtida por simulação entre duas distribuições normais independentes. A função de distribuição de frequência definida é:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \left[ \frac{1}{(x - x_0)^2 + \lambda^2} \right] \quad (\text{D.40})$$

Cuja distribuição de frequência acumulada é:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) \quad (\text{D.41})$$

Onde o parâmetro  $x_0$  se refere à posição na qual ocorre o pico da distribuição e  $\lambda$  é um parâmetro de escala. Como na distribuição gaussiana, a distribuição de Cauchy tem uma forma padrão, assim sua *fdp* é:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} \quad (\text{D.42})$$

### k) Distribuição Beta

A distribuição Beta representa uma família de distribuição de probabilidade contínua definida num intervalo de 0 a 1 e parametrizada por dois parâmetros de forma,  $\alpha$  e  $\beta$ . Algumas vezes, a distribuição Beta é usada para descrever probabilidades de distribuição desconhecidas.

A função densidade que define uma distribuição Beta é:

<sup>8</sup> Também chamada de distribuição de Cauchy-Lorentz em homenagem a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) – matemático francês e Hendrik Lorentz (1853-1928) – físico premiado com o Nobel em 1902 por seu trabalho sobre radiações eletromagnéticas.

$$F(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds} \quad (\text{D.43})$$

O valor esperado e a variância da distribuição Beta são, respectivamente:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{e} \quad \text{var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (\text{D.44})$$

## I) Distribuição F de Snedecor (Fisher-Snedecor)

Por definição, uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição de Fischer-Snedecor, com parâmetros  $n$  e  $d$ , quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme a Eq. (D.45) a seguir:

$$f(x; n, d) = \frac{1}{xB\left(\frac{n}{2}, \frac{d}{2}\right)} \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \left(1 + \frac{n}{d}x\right)^{-\left(\frac{n+d}{2}\right)} \quad (\text{D.45})$$

Onde  $B$  é a função beta, definida por:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{D.46})$$

A função beta tem as seguintes propriedades, dentre outras:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B(y, x) \\ B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ B(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n-y}{n}}{x+n} \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

## m) Distribuição t de Student

Se uma variável  $z$  tem uma distribuição normal  $N(0, 1)$  e  $V$  tem distribuição qui-quadrado com  $k$  grau de liberdade, então a variável  $x$  conforme Eq. (D.48) tem distribuição  $t$  de Student com  $k$  graus de liberdade.

$$x = \frac{z}{\sqrt{V/k}} \quad (\text{D.48})$$

Por definição, uma variável aleatória  $x$  tem uma distribuição  $t$  de Student com  $k$  graus de liberdade, quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme a Eq. (D.49) a seguir:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{1}{2}(k+1)} \quad (\text{D.49})$$

Onde  $\Gamma$  é a função gama e com a seguinte propriedade:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{(k-1)(k-3)\dots 5 \cdot 3}{2\sqrt{k}(k-2)(k-4)\dots 4 \cdot 2} \quad (\text{D.50})$$

A distribuição  $t$  de Student é aplicada nos problemas de determinação da média a partir de uma amostra de uma população que segue uma distribuição normal. Nesses problemas, a média ou o desvio padrão da população são desconhecidos.