APÊNDICE D

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

a) Distribuição binomial

A distribuição binomial[1] é a distribuição de probabilidade discreta do número de sucessos numa sequência de n tentativas desde que as tentativas sejam independentes. Cada tentativa resulta apenas em duas possibilidades, sucesso S ou fracasso F. A expressão que define a distribuição binomial de probabilidade é:

$$p(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \tag{D.1}$$

Onde:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x} \tag{D.2}$$

Onde x é a variável aleatória binomial, significando o número de sucessos em n repetições do experimento; $p(x)$ é a probabilidade de obter x sucessos em n tentativas independentes do experimento; p é a probabilidade de sucesso para uma única tentativa; $1–p$ é a probabilidade complementar (fracasso); e n é o número de vezes que o experimento é realizado. Na distribuição binomial tem-se, portanto, como características: (a) somente dois eventos podem ocorrer; (b) cada tentativa no experimento é independente das outras; e (c) a probabilidade de cada ocorrência se mantém constante para cada tentativa. Uma forma mais descritiva de apresentar a distribuição binominal é:

$$p(x) = \binom{n}{x} \left[p(\text{sucesso})\right]^x \left[p(\text{falha})\right]^{n-x} \tag{D.3}$$

Em algumas situações se deseja obter a probabilidade combinada de um grupo de resultados. Esses resultados normalmente são do tipo "mais do que" ou "menos do que" determinado valor. No caso de distribuição binomial cumulativa, a expressão corresponde à soma das probabilidades consideradas, ou seja:

$$p(x) = \sum_{x=k}^{n} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \tag{D.4}$$

A distribuição binomial pode aproximar-se da distribuição normal nos casos em que n for muito grande e p não seja próximo de zero. A aproximação é tão mais verdadeira quanto mais o valor de p se aproxima de 0,5 ou quando se verifica a condição dada pela Eq. (D.5) a seguir:

---

[1] Originária da distribuição de Bernoulli – essa distribuição é discreta de espaço amostral {0, 1}, com probabilidade p(0)=1–p e p(1)=p. O cientista suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705) foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo diferencial para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas. Se $x_1, x_2, ..., x_n$ são n distribuições de Bernoulli independentes com o mesmo parâmetro p, então sua soma $x=\Sigma x$ é uma distribuição binomial.

$$np(1-p) \geq 25 \tag{D.5}$$

A esperança e a variância de uma variável aleatória x que tem distribuição binomial são, respectivamente:

$$E(x) = np \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 = np(1-p) \tag{D.6}$$

Um caso particular da distribuição binomial é a distribuição de Bernoulli, quando n=1.

b) Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson[2] expressa a probabilidade de eventos discretos ocorrerem num determinado intervalo de medidas contínuas, tais como o tempo, a distância, a área, o volume etc. Exemplos de problemas que podem ser resolvidos com a distribuição de Poisson: determinação do número de consumidores por hora em um posto de combustível, números de vezes em que um fornecimento de energia é interrompido por semestre, pontos de corrosão por metro quadrado em uma plataforma de petróleo, número de camadas de rochas por quilômetro de profundidade numa formação sedimentar etc. Observe que a variável aleatória é discreta e a unidade de medida é contínua. A distribuição de Poisson vai desde zero ocorrência até, teoricamente, um número ilimitado de ocorrências.

Se uma variável aleatória tem distribuição de Poisson, então a probabilidade de ocorrer um dado número de ocorrências por unidade de medida (h, m, m^3, semestre etc.) é dada por:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \tag{D.7}$$

Onde x é o número de ocorrências; λ é a taxa média por unidade de medida; e t é o número de unidades. O valor λt representa a média de ocorrências no intervalo de medida t, portanto: λt=μ. Assim, a Eq. (D.7) se torna:

$$p(x) = \frac{e^{-\mu}(\mu)^x}{x!} \tag{D.8}$$

Note que a distribuição de Poisson é caracterizada por um único parâmetro, sua média. Tanto o valor esperado como a variância de uma distribuição de Poisson é a sua média, λt.

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

c) Distribuição uniforme

A distribuição uniforme caracteriza-se pelo fato de a variável aleatória assumir valores de mesma probabilidade de ocorrência. É também chamada de distribuição retangular e utilizada em tratamento de erros. Observe na Figura D.1 que todos os valores de x entre x_{min} e x_{max} têm a mesma probabilidade de ocorrência.

---

[2] A distribuição de Poisson foi apresentada por Siméon-Denis Poisson (1781-1840) e publicada com a sua teoria da probabilidade em 1838 no seu trabalho "*Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*".

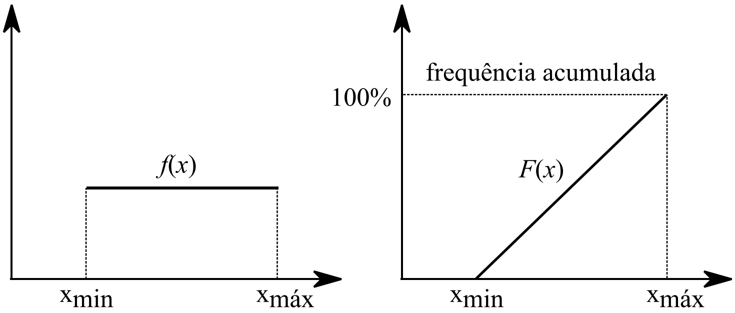


Figura D.1 – Distribuição uniforme

A distribuição uniforme é a distribuição na qual a probabilidade de se gerar qualquer ponto em um intervalo contido no espaço amostral é proporcional ao tamanho do intervalo. Se [a, b]=[x_{min}, x_{max}] for o espaço amostral, por exemplo, então a função densidade de probabilidade e frequência cumulativa são respectivamente:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 0; & x<a \\ (b-a)^{-1}, & a\le x\le b \\ 0; & x>b \end{Bmatrix}, \qquad F(x)=\begin{Bmatrix} 0; & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1; & x>b \end{Bmatrix} \tag{D.9}$$

EXEMPLO D.1 – Com base na definição do valor esperado e da variância dados pelas Eqs. (C.8) e (C.16) (do Apêndice C) respectivamente, determine $E(x)$ e var(x) para uma distribuição uniforme.

Solução

De acordo com a definição do valor esperado de uma distribuição contínua, tem-se que:

$$E(x)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx \tag{D.10}$$

Ou:

$$E(x)=\frac{1}{(b-a)}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{(b^2-a^2)}{2(b-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2} \tag{D.11}$$

A variância var(x) é calculada pela Eq. (C.16). Para determinar $E(x^2)$, basta aplicar a Eq. (C.8) para a distribuição uniforme, portanto:

$$E(x^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \tag{D.12}$$

Logo:

$$\mathrm{var}(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4} \tag{D.13}$$

Que resulta em:

$$\text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{D.14}$$

Os simuladores estatísticos ou planilhas de cálculo possuem um gerador de números aleatórios que gera valores entre 0 e 1 seguindo uma distribuição uniforme. A simulação Monte Carlos, por exemplo, utiliza esse recurso. Esse número é chamado de pseudoaleatório, uma vez que é possível repetir a mesma sequência a partir de uma *semente aleatória*[3].

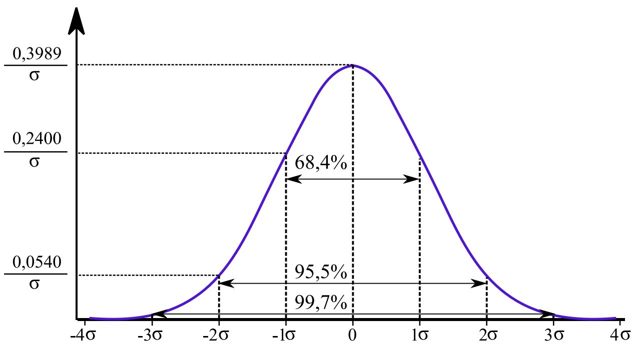
d) Distribuição normal

A distribuição normal é a mais importante e a mais empregada distribuição no estudo da probabilidade e da estatística, também conhecida como distribuição de Gauss. A função que representa essa distribuição foi apresentada pelo matemático francês Abraham de Moivre[4]. Além de descrever fenômenos físicos da natureza, tem sido usada também para outras áreas.

Uma distribuição normal fica perfeitamente definida por dois parâmetros, a média μ e o desvio padrão σ. Devido à sua simetria, a média, a moda e a mediana são iguais. Assim, conhecendo-se a média e o desvio padrão se consegue determinar qualquer probabilidade de um evento que apresente distribuição normal. A expressão geral para a função densidade de probabilidade da distribuição normal é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \tag{D.15}$$

A curva do lado esquerdo da Figura D.2 ilustra uma curva de distribuição normal com as respectivas áreas de acordo com o desvio padrão. A do lado direito indica a função densidade de probabilidade e a função distribuição acumulada.



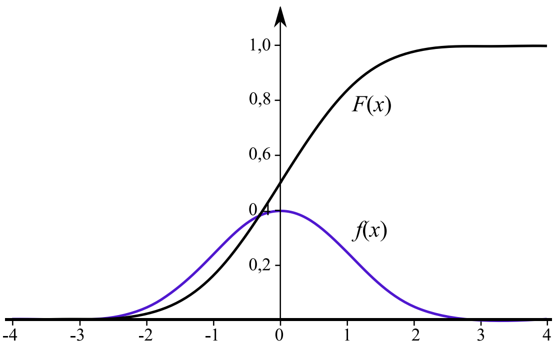


Figura D.2 – Curva de distribuição normal ou curva gaussiana

O domínio da função normal estende-se de $-\infty$ até $+\infty$. O valor da média divide a curva em duas partes e o valor do desvio padrão determina a extensão do espalhamento ou dispersão da variável. Como a área total sob a curva é igual a 1, conclui-se que, quando a média (altura) é

---

[3] A semente aleatória é um número ou vetor usado para iniciar um algoritmo gerador de números pseudoaleatórios – gera uma sequência de números aproximadamente independentes uns dos outros. Existe um hardware para geração de número verdadeiramente aleatório.

[4] Abraham de Moivre (1667-1754) – matemático francês. Ficou famoso com a publicação da Fórmula de Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria e por seus trabalhos relacionados à teoria de probabilidade, a distribuição normal. De Moivre foi o primeiro a usar princípios atuariais e bases científicas para o cálculo de seguros de vida no ano de 1725.

reduzida, a curva deve espalhar-se para as laterais para manter a mesma área total unitária. Adota-se a seguinte notação quando uma variável aleatória x tem uma distribuição normal:

$$x \approx N(\mu, \sigma^2) \tag{D.16}$$

Quando $\mu=0$ e $\sigma^2=1$, reduz-se para a curva normal padrão cuja função densidade e distribuição de frequência acumulada são respectivamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad erfc(x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt \tag{D.17}$$

Onde $erfc(x)$ é conhecida como a função erro gaussiana.

O fato de a curva normal ser perfeitamente definida pela sua média e seu desvio padrão, permite que todas as curvas normais possam ser reduzidas a uma curva normal padrão por simples mudança de variável. Para a leitura de determinada área cumulativa sob a curva de distribuição normal, pode-se empregar o método da distribuição normal padrão, utilizando-se, para tanto, uma tabela especial padronizada que apresente os valores para uma variável adimensional z definida por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{D.18}$$

Onde x é um valor específico da variável de interesse, μ é a sua média e σ é o seu desvio padrão. Essa expressão permite determinar o ponto z sobre a curva normal padrão que corresponde a qualquer ponto x sobre a curva normal. A curva mais simples para se trabalhar é a que tem média igual a 0 e desvio padrão igual a 1, razão pela qual se transformam as curvas normais para essa curva padrão. Como a distribuição é simétrica em torno da média, é comum apresentar a tabela para a metade da distribuição. A tabela é destinada a determinar a área para a variável z sob a metade direita da curva normal que tem como média 0 e desvio padrão 1. A área sob a curva de uma distribuição normal $N(0, 1)$ compreendida entre a e b (ver Figura D.3) é calculada com a seguinte expressão:

$$p(a \le x \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \tag{D.19}$$

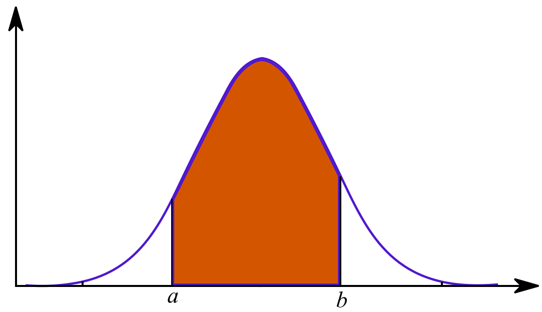


Figura D.3 – Área sob a curva compreendida por dois valores

A integral da Eq. (D.19) só é obtida por métodos de integração numérica.

Há razões para a importância da distribuição normal na estatística teórica e na aplicada. Entre essas razões podem ser citadas:

- Representam com boa aproximação para uma infinidade de fenômenos físicos e naturais;
- Servem como aproximação de distribuições binomiais quando n é grande;

- É possível estabelecer, conforme já exposto, uma curva normal padrão por meio de um escalonamento relativo das variáveis reais (média e desvio) com a variável *z*. Isso torna fácil trabalhar com a distribuição de todas as distribuições normais.

A distribuição normal representa uma família infinita de distribuições, uma para cada combinação possível de média e desvio padrão. Cada curva da família tem a mesma área. Ver Figura D.4.

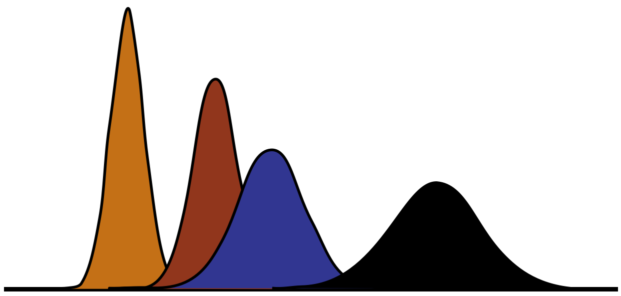


Figura D.4 – Famílias de curvas normais (área sob a curva igual a 1)

Um teorema importante da distribuição normal diz que, se uma variável aleatória *x* tiver uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$ e se $y=ax+b$, então *y* terá uma distribuição normal $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

e) Distribuição exponencial

A distribuição exponencial trata de probabilidades de eventos ao longo do tempo ou da distância entre ocorrências num intervalo contínuo. Exemplos de eventos que podem ser representados por uma distribuição exponencial:

- Tempo de chegada de um cliente em um posto de abastecimento de biodiesel;
- Tempo de falhas em poços de petróleo;
- Tempo entre uma troca de broca e outra nas operações de perfuração de poços etc.

Há semelhanças entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson. As probabilidades exponenciais são expressas em termos de tempo ou distância de ocorrência entre os eventos. A função que modela essa destruição é:

$$p(T > t) = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow p(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{D.20}$$

Onde λ representa as ocorrências durante um intervalo. Assim, o espaço (ou tempo etc.) entre ocorrências durante esse intervalo é $1/\lambda$. A Eq. (D.20) pode ser representada por um gráfico conforme indicado na Figura D.5.

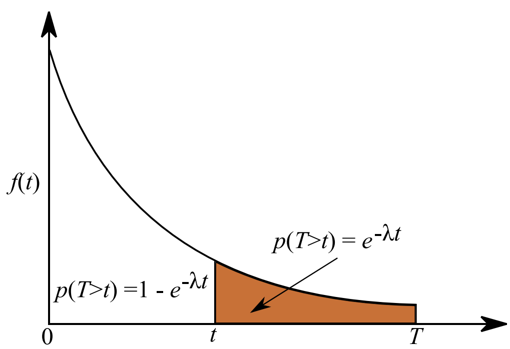


Figura D.5 – Distribuição exponencial

f) Distribuição lognormal

A distribuição lognormal é uma distribuição contínua de probabilidade e semelhante à distribuição normal com assimetria em relação ao eixo vertical. Da mesma forma que a normal, a distribuição lognormal é definida por dois parâmetros: a média e o desvio padrão. Quando a variável aleatória *x* tem distribuição lognormal, o logaritmo de *x* tem distribuição normal. Quando a variável aleatória é formada pelo produto de outras variáveis aleatórias, a distribuição tende à lognormal.

A distribuição lognormal, assim como a distribuição de Weibull, é útil para modelar as funções de tempo de vida de produtos e materiais, por exemplo: fadiga de metais em geral, equipamento como bombas de cavidades progressivas de poços de petróleo, compressores de unidade de gás, semicondutores etc. A função densidade para a distribuição lognormal é:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{D.21}$$

Observe que a distribuição lognormal é caracterizada pela média e pelo desvio padrão. Sabe-se também que, se $\ln(x)=y$ e x é uma variável aleatória com distribuição lognormal, então y é uma variável aleatória com distribuição normal. A Figura D.6 mostra algumas curvas com distribuição lognormal.

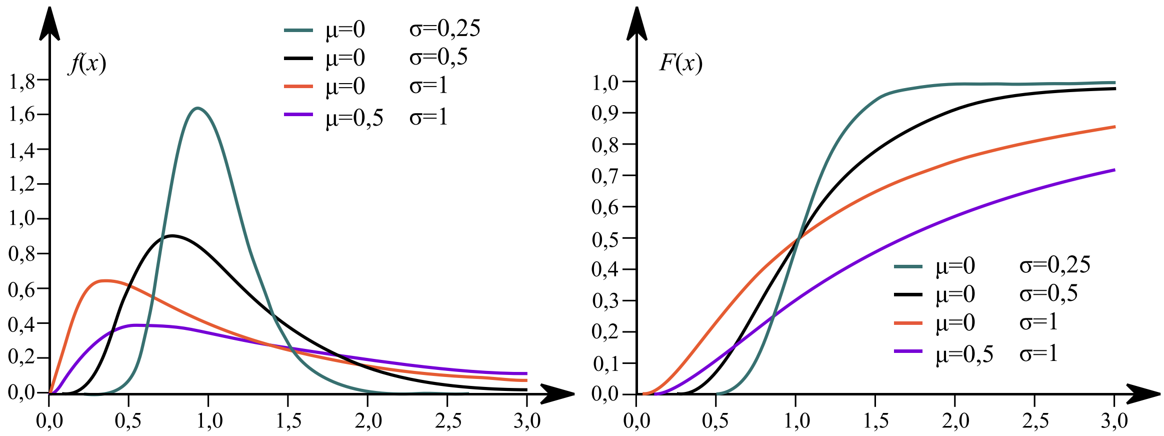


Figura D.6 – Distribuição lognormal

Pode-se demonstrar que o valor esperado de uma variável que tem distribuição lognormal é:

$$E(x) = E(e^y) = e^{E(y)+0,5\,\mathrm{var}(y)} \tag{D.22}$$

Onde var(y) é a variância de y, que equivale a:

$$\mathrm{var}(x) = e^{2E(y)+\mathrm{var}(y)}(e^{\mathrm{var}(y)}-1) \tag{D.23}$$

As distribuições contínuas seguintes são as mais comuns da literatura e são mostradas nesta revisão apenas a título de informação. Algumas delas podem ser úteis em estudos específicos de algumas variáveis de natureza diversa.

g) Distribuição de Rayleigh

A função densidade de probabilidade de Rayleigh[5] é definida conforme Eq. (D.24) a seguir:

$$f(x) = \frac{x}{b^2} e^{-x^2/2b^2} \tag{D.24}$$

Onde b é um parâmetro de posição. A função de frequência acumulada é:

$$F(x) = \left(1 - e^{-x^2/2b^2}\right) \tag{D.25}$$

A Figura D.7 ilustra a função densidade de probabilidade e a função de frequência acumuladas da distribuição de Rayleigh para alguns valores de b. Essa distribuição de frequência tem valor esperado e variância respectivamente iguais a:

$$E(x) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{var}(x) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \tag{D.26}$$

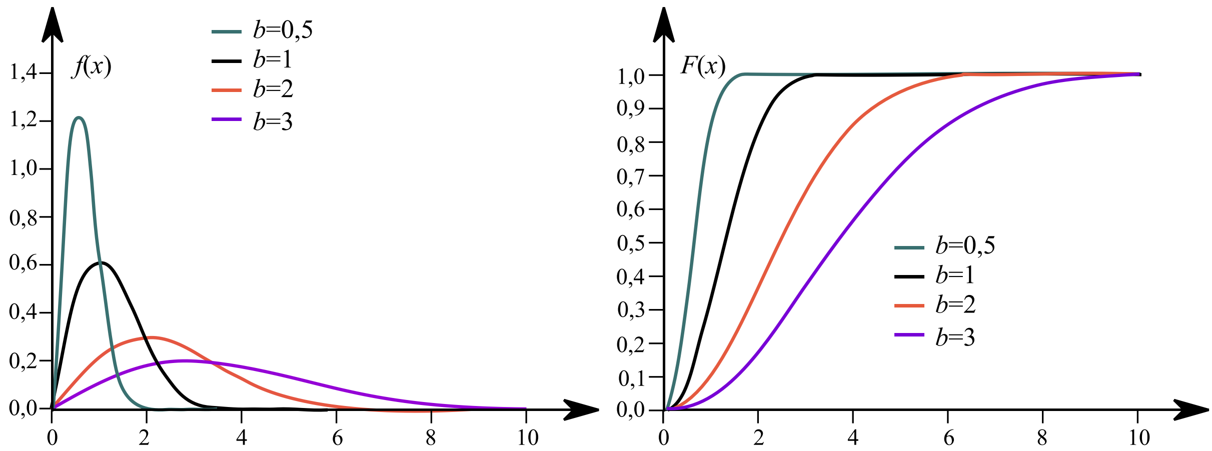


Figura D.7 – Distribuição de Rayleig

A distribuição de Rayleigh é utilizada, por exemplo, para representar a magnitude dos vetores velocidades ortogonais do vento durante um ano, desde que se assuma que tais vetores tenham distribuição normal com igual variância e não sejam correlacionados. Outras aplicações dessa distribuição estão relacionadas à superfície de ondas e sinais de rádio.

Se x e y são variáveis independentes com distribuição normal $N(0,\sigma^2)$, então a variável a seguir:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{D.27}$$

Segue uma distribuição de Rayleigh. Essa distribuição é um caso especial da distribuição de Weibull.

[5] John William Strutt, 3° Baron Rayleigh (1842-1919) – físico inglês. Junto de William Ramsay, descobriu o elemento argônio e recebeu por isso o prêmio Nobel de Física em 1904. Ele também explicou porque o céu é azul e fez predições sobre as superfícies de ondas, hoje conhecidas como ondas Rayleigh.

h) Distribuição Gama

Uma distribuição importante da teoria de probabilidades é a distribuição Gama. Essa distribuição é frequentemente utilizada para modelar tempo de espera, como, por exemplo, o tempo de vida de uma pessoa. Por definição, uma variável aleatória x tem uma distribuição Gama com k graus de liberdade e um parâmetro escalar θ se apresentar a seguinte *fdp*:

$$f(x,k,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x^{k-1}e^{-x/\theta}}{\theta^{k}\Gamma(\alpha)} & x\geq 0 \quad k,\theta>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{D.28}$$

Onde $\Gamma(\alpha)$ é a função Gama. A distribuição Gama não tem uma forma simples como a distribuição normal, a exponencial ou a lognormal – ver exemplo na Figura D.8 para alguns graus de liberdade k e alguns valores escalares de θ.

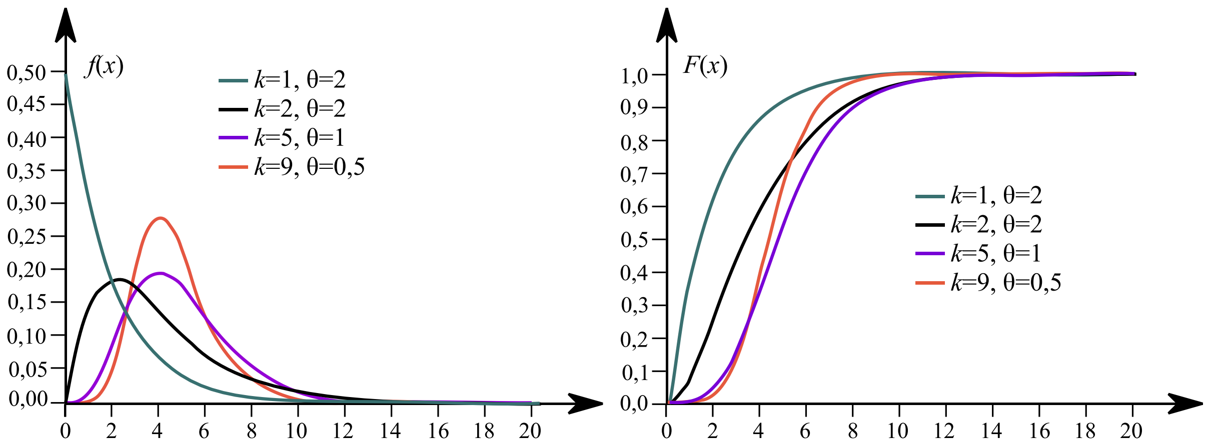


Figura D.8 – Distribuição Gama

Normalmente, a distribuição Gama é parametrizada com $\alpha=k$ e $\beta=1/\theta$. Assim, com essa parametrização, tem-se a seguinte *fdp*:

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x\geq 0 \quad \alpha,\beta>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{D.29}$$

A função Gama é uma extensão da função fatorial para números complexos, definida por:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \tag{D.30}$$

Onde t é uma variável muda de integração. Essa função, de modo geral, tem a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=...=(n-1)(n-2)...\Gamma(1) \tag{D.31}$$

Como $\Gamma(1)$=1, tem-se que:

$$\Gamma(n)=(n-1)! \tag{D.32}$$

Com a seguinte particularidade:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{D.33}$$

O valor esperado da distribuição gama é $E(x)=\alpha/\beta$ e a variância é $var(x)=\alpha/\beta^2$. Os casos particulares dessa distribuição são:

- Se $\alpha=1$, resulta que $f(x)=\beta e^{-\beta x}$, que equivale à distribuição exponencial onde $\lambda=\beta$. Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição Gama;
- Se $\beta=1/2$ e $\alpha=k/2$, onde k é um inteiro positivo maior que zero, a função Gama assume a seguinte *fdp*:

$$f(x,k)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{matrix}\right\} \tag{D.34}$$

Essa *fdp* representa a distribuição qui-quadrada $\chi^2(k)$ com k graus de liberdade, com $E(x)=k$ e a variância $var(\mathrm{x})=2k$. Essa distribuição é muito utilizada em testes de significância de várias amostras para estimar proporções.

Se $\beta=k$, onde k é um inteiro positivo maior que zero, a distribuição Gama se transforma na distribuição de Erlang[6] com a seguinte *fdp*:

$$f(x,k,\lambda)=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x} \qquad x,\lambda\geq 0 \tag{D.35}$$

Uma notação usual utilizada em algumas publicações é feita com o auxílio de indicadores com os quais fica explícito que, fora do intervalo especificado no indicador, a função densidade se anula. Por exemplo, a *fdp* da Eq. (D.35) pode ser reescrita incluindo uma função indicadora:

$$f(x,k)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}I_{[0,\infty)}(x) \tag{D.36}$$

Onde:

$$I_{[a,b]}=\left\{\begin{matrix} 1; & \text{se } a\leq x\leq b \\ 0; & \text{para qualquer outro valor de } x \end{matrix}\right\} \tag{D.37}$$

i) Distribuição de Weibull

Por definição, uma variável aleatória x tem uma distribuição de Weibull[7] com parâmetros k e λ, quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme Eq. (D.38) a seguir:

[6] Agner Krarup Erlang (1878-1929) – foi matemático, estatístico e engenheiro, pioneiro na Engenharia de Tráfico e publicou excelentes trabalhos sobre a teoria das filas em estudos de telecomunicações. A distribuição de Erlang é usada em processos estocásticos da biomatemática.

[7] Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887-1979) – engenheiro e matemático sueco. É reconhecido pelo seu trabalho na área de fadiga de materiais e na estatística por sua contribuição – a distribuição de Weibull.

$$f(x;\lambda,k)=\begin{cases}\dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{D.38}$$

Onde $k>0$ é um parâmetro de forma e λ é um parâmetro de escala. O valor esperado e a variância da distribuição de Weibull são dados por:

$$E(x)=\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right); \qquad \mathrm{var}(x)=\lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] \tag{D.39}$$

A distribuição de Weibull é usada em previsão de tempo de vida de equipamentos e estimativa de tempos entre falhas.

j) Distribuição de Cauchy

A distribuição de Cauchy[8] se caracteriza por não possuir uma média definida, portanto também não se pode definir seu desvio padrão. A distribuição de Cauchy tem pouca utilidade em análise de risco. É usada com frequência na mecânica e na elétrica e em problemas de medição e calibração.

Essa distribuição pode ser obtida por simulação entre duas distribuições normais independentes. A função de distribuição de frequência definida é:

$$f(x)=\frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{(x-x_0)^2+\lambda^2}\right] \tag{D.40}$$

Cuja distribuição de frequência acumulada é:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right) \tag{D.41}$$

Onde o parâmetro x_0 se refere à posição na qual ocorre o pico da distribuição e λ é um parâmetro de escala. Como na distribuição gaussiana, a distribuição de Cauchy tem uma forma padrão, assim sua *fdp* é:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)} \tag{D.42}$$

k) Distribuição Beta

A distribuição Beta representa uma família de distribuição de probabilidade contínua definida num intervalo de 0 a 1 e parametrizada por dois parâmetros de forma, α e β. Algumas vezes, a distribuição Beta é usada para descrever probabilidades de distribuição desconhecidas.

A função densidade que define uma distribuição Beta é:

[8] Também chamada de distribuição de Cauchy-Lorentz em homenagem a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) – matemático francês e Hendrik Lorentz (1853-1928) – físico premiado com o Nobel em 1902 por seu trabalho sobre radiações eletromagnéticas.

$$F(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds} \tag{D.43}$$

O valor esperado e a variância da distribuição Beta são, respectivamente:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{D.44}$$

l) Distribuição F de Snedecor (Fisher-Snedecor)

Por definição, uma variável aleatória x tem uma distribuição de Fischer-Snedecor, com parâmetros n e d, quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme a Eq. (D.45) a seguir:

$$f(x;n,d) = \frac{1}{xB\left(\frac{n}{2},\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{d}x\right)^{-\left(\frac{n+d}{2}\right)} \tag{D.45}$$

Onde B é a função beta, definida por:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{D.46}$$

A função beta tem as seguintes propriedades, dentre outras:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(y,x) \\ B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ B(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\begin{pmatrix} n-y \\ n \end{pmatrix}}{x+n} \end{aligned} \tag{D.47}$$

m) Distribuição t de Student

Se uma variável z tem uma distribuição normal $N(0, 1)$ e V tem distribuição qui-quadrado com k grau de liberdade, então a variável x conforme Eq. (D.48) tem distribuição t de Student com k graus de liberdade.

$$x = \frac{z}{\sqrt{V/k}} \tag{D.48}$$

Por definição, uma variável aleatória x tem uma distribuição t de Student com k graus de liberdade, quando sua função densidade de probabilidade se comporta conforme a Eq. (D.49) a seguir:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{1}{2}(k+1)} \tag{D.49}$$

Onde Γ é a função gama e com a seguinte propriedade:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{(k-1)(k-3)....5\cdot 3}{2\sqrt{k}\,(k-2)(k-4)...4\cdot 2} \tag{D.50}$$

A distribuição *t* de Student é aplicada nos problemas de determinação da média a partir de uma amostra de uma população que segue uma distribuição normal. Nesses problemas, a média ou o desvio padrão da população são desconhecidos.